Coordenadas Polares

1 Sistema de coordenadas polares

Para definir las coordenadas polares de un punto en el plano fijamos inicialmente en él un punto O llamado origen (*polo*) y un rayo inicial (eje polar) desde O (figura 1*a*).

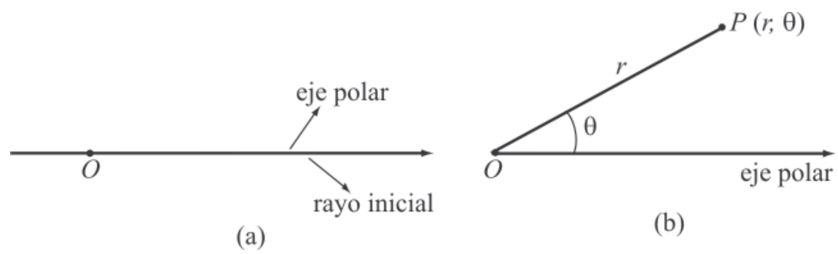

Figura 1

A cada punto P del plano puede asignársele un par de coordenadas, (r,θ), llamadas *coordenadas polares del punto P* y tales que:

r: distancia dirigida de O a P.

θ: ángulo (positivo o negativo y expresado en radianes) formado por el eje polar y el rayo OP (figura 1*b*).

Observaciones:

i. Para un ángulo dado θ, la coordenada r puede ser positiva o negativa, dependiendo de si se toma sobre $\overline{OP}$ o sobre su prolongación. En la figura 2 se ilustra esta situación para diferentes puntos en el plano polar.

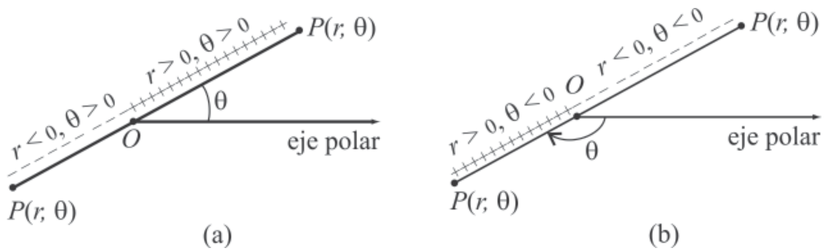

Figura 2

ii. Un punto $P(r,\theta)$ en coordenadas polares puede tener diferentes representaciones según la escogencia que se haga de las coordenadas r y θ.

Así por ejemplo, el punto $P\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ (figura 3*a*) puede tener las siguientes representaciones:

$$P\left(3,\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow P_1\left(-3,-\frac{3\pi}{4}\right) \qquad \text{(figura 3}b\text{)}$$

$$\Leftrightarrow P_2\left(-3,\frac{5\pi}{4}\right) \qquad \text{(figura 3}c\text{)}$$

$$\Leftrightarrow P_3\left(3,-\frac{7\pi}{4}\right) \qquad \text{(figura 3}d\text{)}$$

$$\Leftrightarrow P_4\left(3,\frac{9\pi}{4}\right) \qquad \text{(figura 3}e\text{)}$$

De aquí se deduce que no existe una correspondencia biunívoca entre los puntos $P(r,\theta)$ y los puntos del plano, como sí se cumple en el sistema de coordenadas rectangulares.

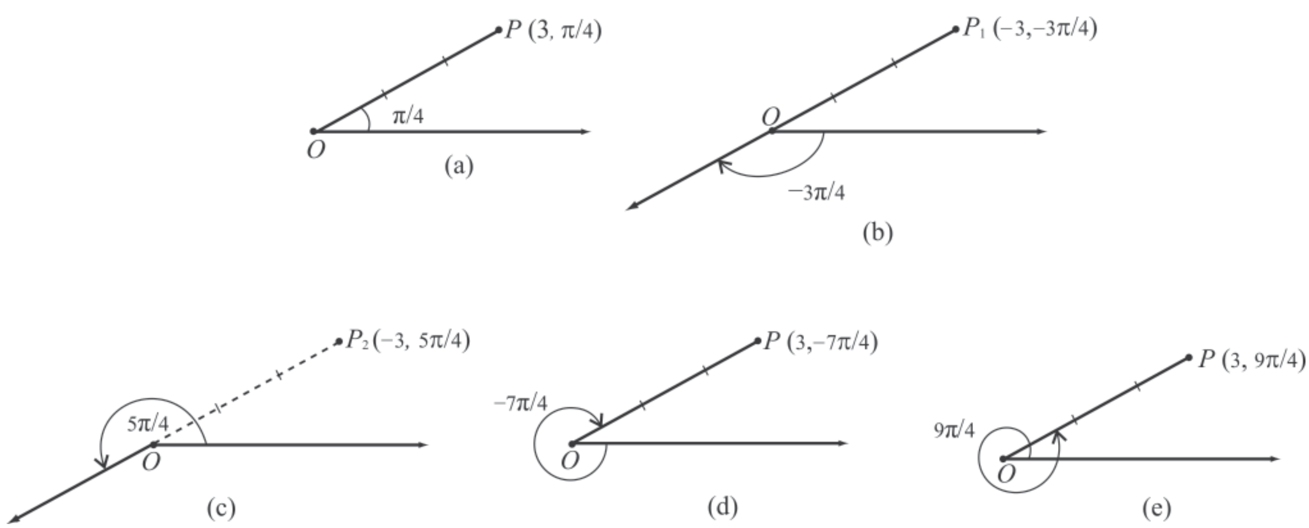

Figura 3

1.1 Relación entre las coordenadas rectangulares y polares

Para establecer la relación existente entre los sistemas de coordenadas polares y rectangulares, hacemos coincidir inicialmente los dos planos. Es decir, el polo del plano polar coincidiendo con el origen del plano cartesiano y el eje polar con el eje x (figura 4).

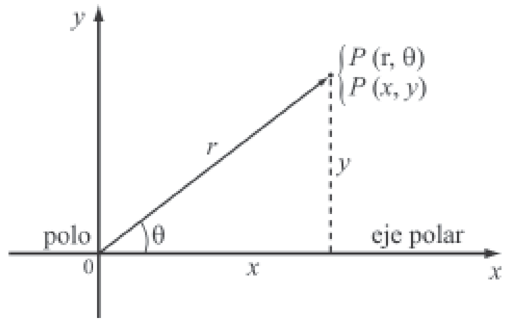

Figura 4

De esta forma para el punto P podemos establecer las siguientes relaciones, que se deducen fácilmente de la figura 4;

$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

$$\tan\,\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

$$\cos\,\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\,\cos\,\theta. \tag{3}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\,\text{sen}\,\theta. \tag{4}$$

- Si conocemos las coordenadas rectangulares del punto $P(x, y)$, entonces usando (1) y (2) podemos determinar las coordenadas polares $P(r, \theta)$ del mismo punto.

- Si conocemos las coordenadas polares $P(r, \theta)$ del punto, entonces usando (3) y (4) podemos determinar las coordenadas rectangulares $P(x, y)$ del mismo punto.

Ejemplo 1

Escriba en coordenadas rectangulares los siguientes puntos dados en coordenadas polares:

a. $P_1(3, \pi)$. b. $P_2\left(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$.

Solución

a. Como $r = 3$ y $\theta = \pi$, se sigue entonces de (3) y (4) que:

$$x = r\cos\theta \Rightarrow x = 3\cdot\cos\pi = -3,$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow y = 3\cdot\mathrm{sen}\,\pi = 0.$$

En consecuencia, el punto $P_1(3,\pi)$ en coordenadas polares tiene su homólogo $P_1(-3,0)$ en coordenadas rectangulares.

b. Como $r = \sqrt{2}$ y $\theta = -\frac{3\pi}{4}$, se deduce entonces de (3) y (4):

$$x = r\cos\theta = \sqrt{2}\,\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1,$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$$

En consecuencia, el punto $P_2\left(\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$ en coordenadas polares tiene su homólogo $P_2\,(1,-1)$ en coordenadas rectangulares.

Ejemplo 2

Escriba en polares $(r > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi)$ los siguientes puntos dados en coordenadas rectangulares:

a. $P_1\,(-\sqrt{3},1)$. b. $P_2\,(-2,-2\sqrt{3})$.

Solución

En la figura 5 aparecen los puntos localizados en el plano cartesiano, los cuales nos ayudarán a determinarlos en coordenadas polares.

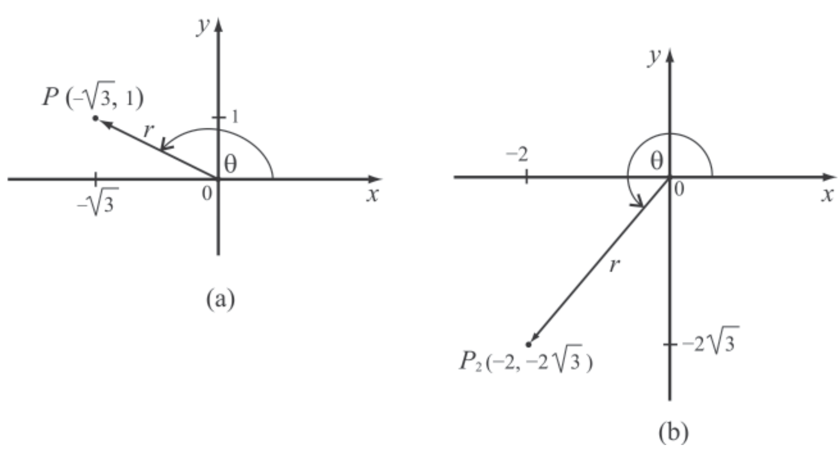

Figura 5

a. Como $x = -\sqrt{3}$ e $y = 1$, se deduce entonces de (1) y (2) que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

En consecuencia, el punto $P_2(-\sqrt{3},1)$ en coordenadas rectangulares tiene su correspondiente $P_2\left(2,\frac{5\pi}{6}\right)$ en coordenadas polares.

b. Similarmente, como $x = -2$ e $y = -2\sqrt{3}$ (figura 5*b*), se deduce de (1) y (2) que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+12} = 4,$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3} \text{ (puesto que } x < 0 \text{ y } y < 0).$$

Luego el punto $P_2\left(4,\frac{4\pi}{3}\right)$ es el correspondiente en coordenadas polares al punto $P_2(-2,-2\sqrt{3})$ en coordenadas rectangulares.

Las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) no sólo son útiles para transformar puntos de un sistema a otro, sino que también permiten expresar una relación de la forma $y = f(x)$ en una de la forma $r = f(\theta)$ y viceversa, como lo mostraremos en la próxima sección.

1.2 Gráfica de ecuaciones en coordenadas polares

La gráfica de una ecuación en coordenadas polares (r,θ) consiste en todos aquellos puntos P que tienen por lo menos un par de coordenadas que satisfacen la ecuación.

Se llama *ecuación polar* a la ecuación de una gráfica cuyos componentes se dan en coordenadas r y θ, para distinguirla de la ecuación cartesiana cuyas componentes se dan en términos de x e y.

Ejemplo 3

Escriba la ecuación polar de las siguientes ecuaciones cartesianas:

a. $x^2 + y^2 = 16.$ b. $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2).$

Solución

a. De acuerdo con (1), $x^2 + y^2 = r^2$.

Luego, en nuestro caso, $x^2 + y^2 = 16$.

Así que $r^2 = 16$, lo cual implica que $r = \pm 4$.

Esto es, $r = 4$ o $r = -4$ representa en coordenadas polares la ecuación de una circunferencia centrada en el polo y radio 4.

Nota: en coordenadas polares, la ecuación $r = 4$ o $r = -4$ se lee:

«Cualquiera que sea el ángulo θ, $r = 4$»
«Cualquiera que sea el ángulo θ, $r = -4$»

Note además que ambas ecuaciones representan la misma circunferencia, pero recorridos en formas diferentes.

b. Usando las ecuaciones (1), (3) y (4) podemos escribir en este caso:

$$\begin{aligned}(r^2)^2 = 4(r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta) &\Leftrightarrow r^4 = 4r^2\cos 2\theta\\ &\Leftrightarrow r^2(r^2 - 4\cos 2\theta) = 0\\ &\Leftrightarrow r = 0 \vee r^2 = 4\cos 2\theta.\end{aligned}$$

Pero $r = 0$ (ecuación del polo), lo cual indica que la curva pasa por el origen.

La otra igualdad, $r^2 = 4\cos 2\theta$, representa la ecuación polar de la ecuación cartesiana dada.

Ejemplo 4

Escriba la ecuación cartesiana de las siguientes ecuaciones polares:

a. $r^2 = 2\operatorname{sen} 2\theta$.

b. $r = \dfrac{6}{2 - 3\operatorname{sen}\theta}$, $r > 0$.

Solución

a. En primer lugar,

$$r^2 = 2\operatorname{sen} 2\theta \Leftrightarrow r^2 = 2\cdot 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Ahora, usando las igualdades (1), (3) y (4), se puede escribir la última igualdad:

$$x^2 + y^2 = 2 \cdot 2\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{4xy}{r^2} = \frac{4xy}{x^2 + y^2}.$$

Es decir, $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ es la ecuación cartesiana de la ecuación polar dada.

b. La ecuación $r = \dfrac{6}{2 - 3\operatorname{sen}\theta}$ puede escribirse en las formas equivalentes:

$$\begin{aligned} r = \frac{6}{2 - 3\operatorname{sen}\theta} &\Leftrightarrow r = \frac{6}{2 - \frac{3y}{r}} = \frac{6r}{2r - 3y} \\ &\Leftrightarrow 2r - 3y = 6 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = 6 + 3y. \end{aligned}$$

Esto es, la ecuación $2\sqrt{x^2 + y^2} = 6 + 3y$ es la ecuación cartesiana de la ecuación polar dada.

1.2.1 Algunas gráficas importantes en coordenadas polares

i. La ecuación en su forma polar

$$\begin{cases} \theta = \alpha \quad (\alpha : \text{en radianes}) \\ \theta = \alpha \pm 2n\pi \end{cases}$$

representa una línea recta que pasa por el polo, formando un ángulo α con el eje polar (figura 6*a*).

ii. La ecuación en su forma polar

$$r \operatorname{sen} \theta = b \Leftrightarrow r = b \csc \theta$$

representa una recta paralela al eje polar, que corta al rayo $\frac{\pi}{2}$ b unidades por encima o por debajo del polo (figuras 6*b* y 6*c*).

iii. La ecuación en su forma polar

$$r \cos \theta = a \Leftrightarrow r = a \sec \theta$$

representa una recta paralela al rayo $\frac{\pi}{2}$, que corta al eje polar a unidades a la derecha ($a > 0$) o a la izquierda ($a < 0$) del polo (figuras 7*a* y 7*b*).

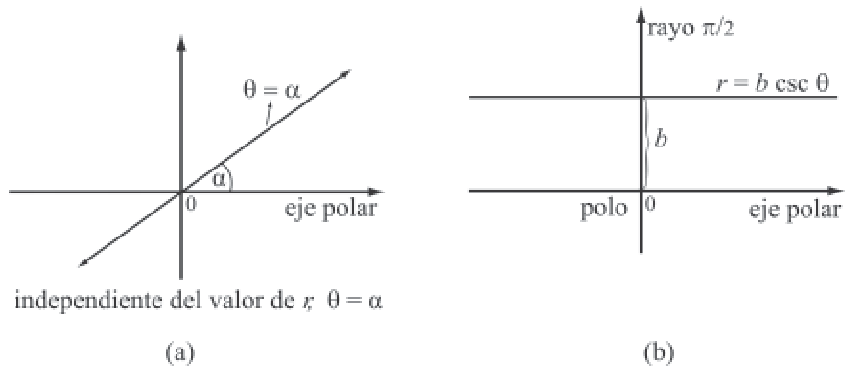

Figura 6

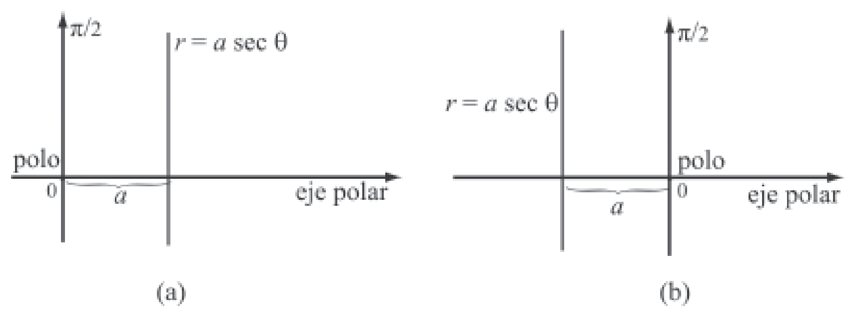

Figura 7

iv. La ecuación en su forma polar:

$r = c, \quad c = \text{constante},$

representa una circunferencia centrada en el polo y cuyo radio es $|c|$ (figura 8).

Las curvas $r = c$ o $r = -c$ representan la misma circunferencia, sólo que su recorrido se inicia en el punto $(c, 0)$ o en el punto $(-c, 0)$ (figuras 8*a* y *b*).

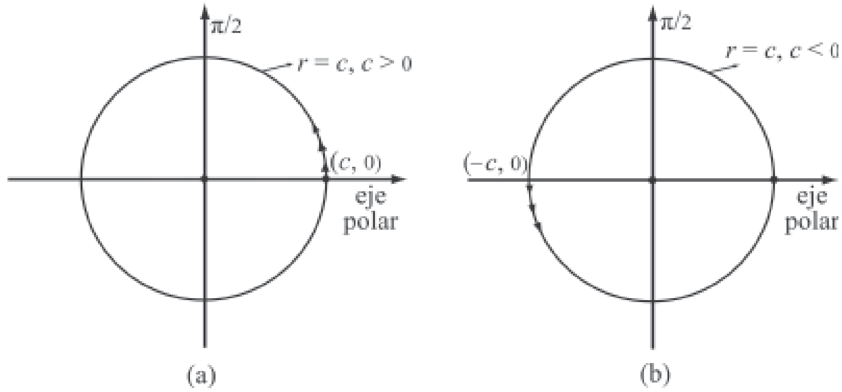

Figura 8

v. Considere ahora la ecuación en forma cartesiana:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0,$$

la cual representa una circunferencia que pasa por el origen, cuyo centro es el punto $C(a,b)$ y su radio es $\sqrt{a^2+b^2}$.

Para analizar la ecuación dada la escribiremos en la forma polar así:

$$\begin{aligned} r^2 - 2ar\cos\theta - 2br\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 &\Leftrightarrow r(r - 2a\cos\theta - 2b\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow r = 0 \text{ (ecuación del polo)} \\ &\qquad \vee \\ &\quad r = 2a\cos\theta + 2b\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{aligned}$$

Es decir,

$$r = 2a\cos\theta + 2b\,\mathrm{sen}\,\theta \quad (*)$$

representa la misma circunferencia.

- Si $b = 0$, entonces (*) se transforma en:

  $$r = 2a\cos\theta,$$

  la cual representa una circunferencia con centro en el punto $C(a,0)$ y que pasa por el polo (figuras 9*a* y 9*b*).

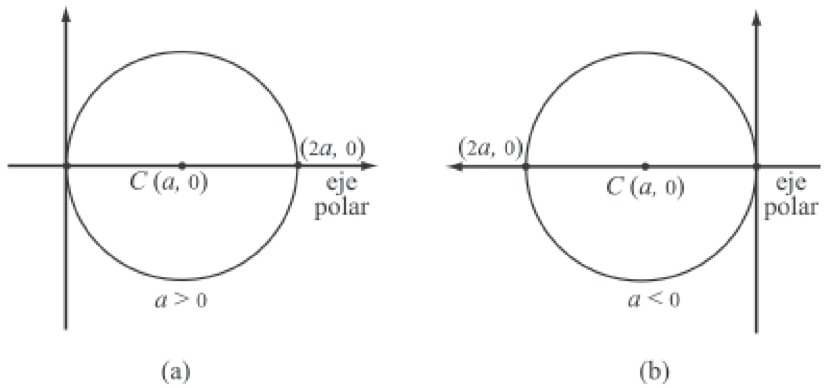

Figura 9

- Si $a = 0$, entonces (*) se transforma en:

$$r = 2b \text{ sen } \theta,$$

la cual representa una circunferencia con centro en el punto $C\left(b, \frac{\pi}{2}\right)$ y que pasa por el polo (figuras 10*a* y 10*b*).

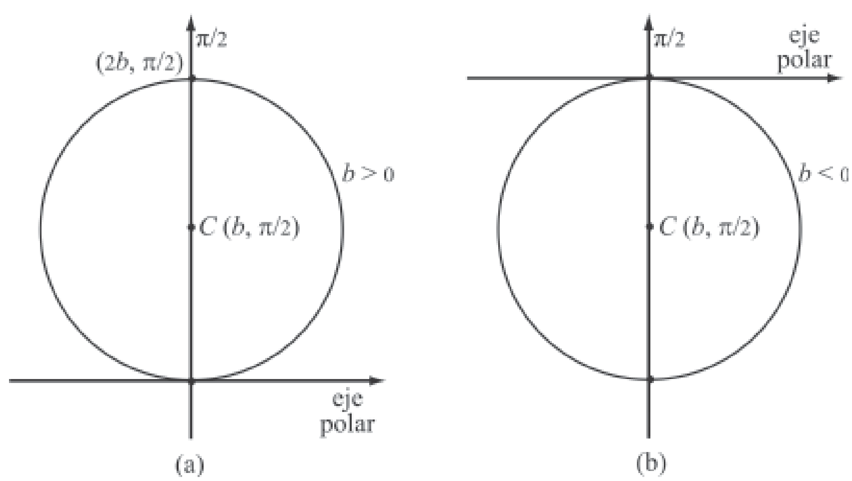

Figura 10

vi. La gráfica de una ecuación en la forma polar

$$\begin{cases} r = a \cos n\theta \\ r = a \text{ sen } n\theta \end{cases}$$

representa una rosa de n «pétalos» si n es impar, y de $2n$ «pétalos» si n es par.

Así por ejemplo, la ecuación $r = 2 \text{ sen } 3\theta$ representa una rosa de tres pétalos, como la que aparece en la figura 11*a*.

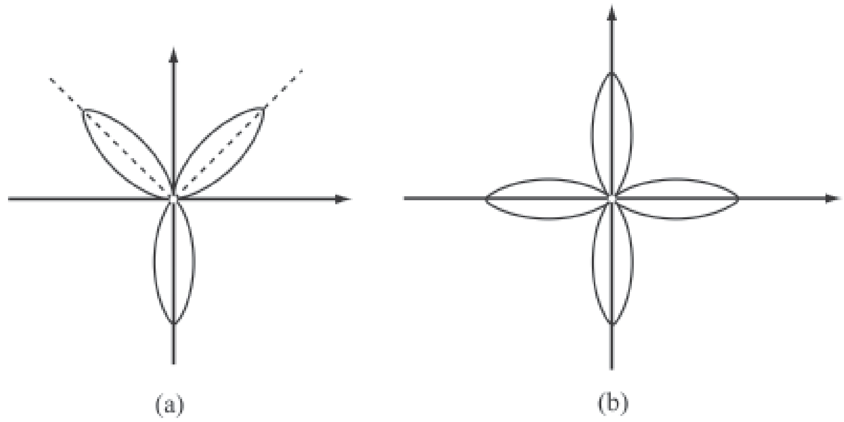

Figura 11

La ecuación $r = 3 \cos 2\theta$ representa una rosa de cuatro «pétalos», como la que aparece en la figura 11*b*.

vii. La gráfica de una ecuación de cualquiera de las formas:

$$\begin{cases} r = a \pm b \cos\theta \\ \\ r = a \pm b \text{ sen } \theta \end{cases} \qquad \text{con } a > 0,\ b > 0$$

se denomina *limaco* (figura en forma de caracol) y su forma depende de la relación entre los valores de *a* y *b* así:

- Si $a = b$, se llama *cardiode* (figura 12).
- Si $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, se llama *limazón con nudo* (figura 13).
- Si $1 < \dfrac{a}{b} < 2$, se llama *cardioide con hendidura* (figura 14).
- Si $\dfrac{a}{b} \geq 2$, se llama *limazón convexo* (figura 15)

viii. La gráfica de una ecuación de cualquiera de las formas:

$$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta,$$
$$r^2 = \pm a^2 \text{ sen } 2\theta,$$

representan curvas en forma de aspa de hélice y se denominan *lemniscatas* (figura 16).

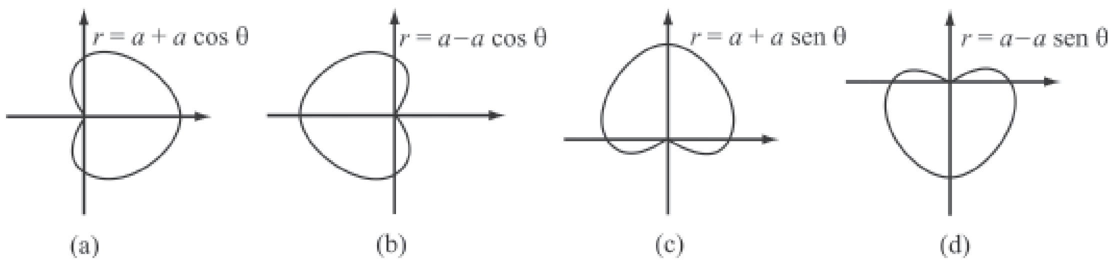

Figura 12

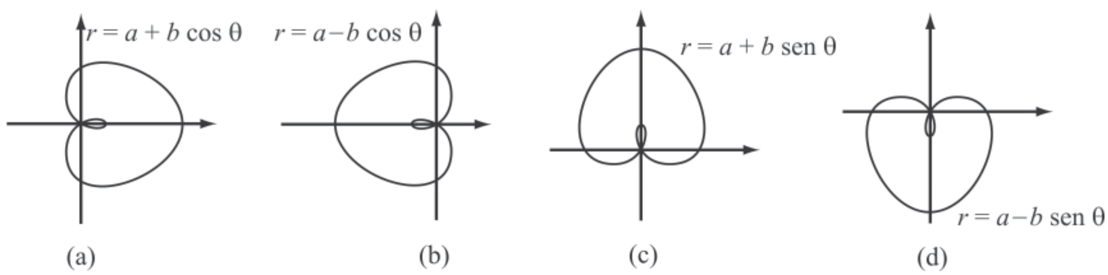

Figura 13

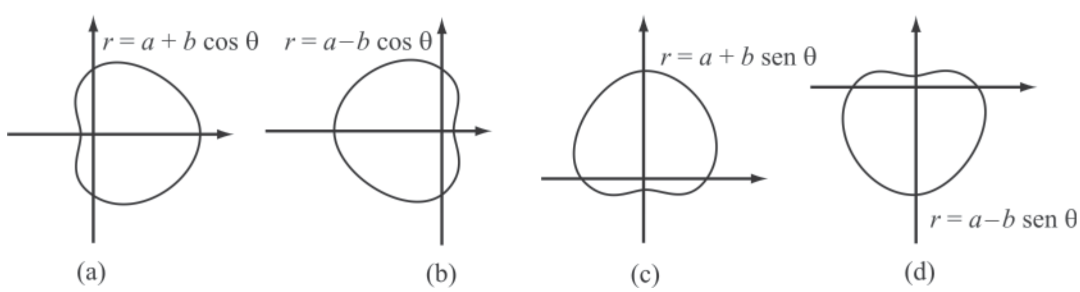

Figura 14

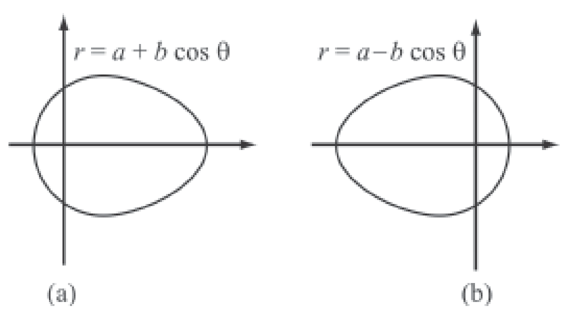

Figura 15

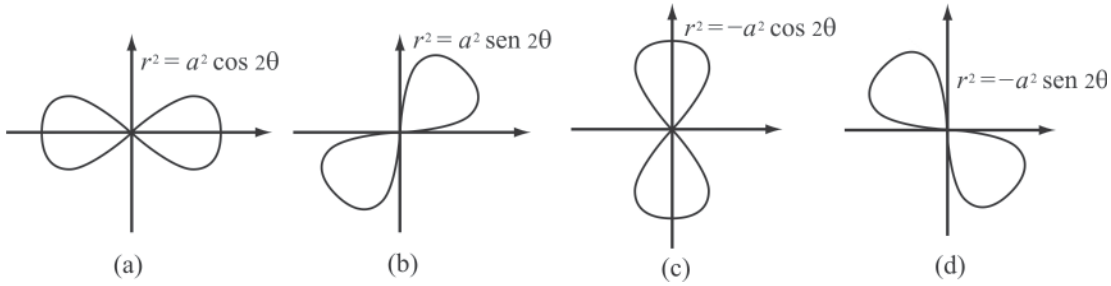

Figura 16

Para trazar todas las curvas mencionadas anteriormente y muchas otras de importancia que aparecen en el cálculo, se precisa conocer de ellas algunas propiedades adicionales: simetrías, pertenencia o no pertenencia del polo a la curva, tangentes en el origen, valores máximos y mínimos, etc., las cuales para su uso mencionamos a continuación:

1.2.2 Elementos adicionales para trazar curvas en polares

- **Simetrías**

Sea $r = f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares. Entonces: (1)

i. Si la ecuación (1) no varía al sustituir:

$$(\theta \text{ por } -\theta) \text{ o } (r \text{ por } -r \text{ y } \theta \text{ por } \pi-\theta),$$

entonces la *curva es simétrica con respecto al eje polar* (figura 17).

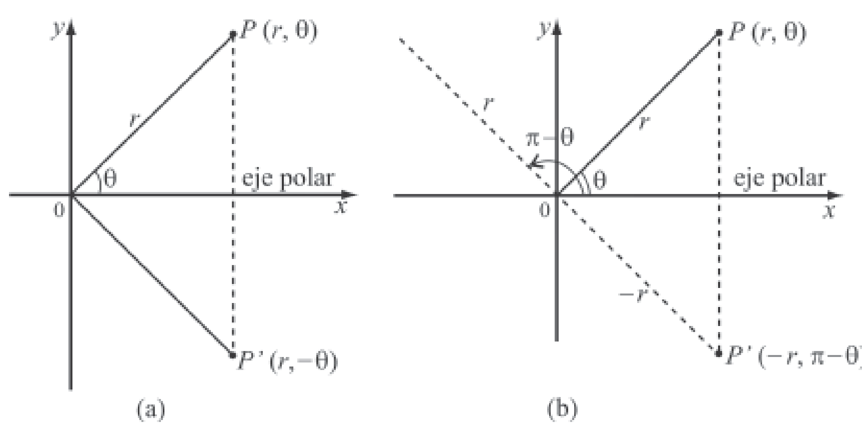

Figura 17

ii. Si la ecuación (1) no varía al sustituir

$$(\theta \text{ por } \pi-\theta) \text{ o } (r \text{ por } -r \text{ y } \theta \text{ por } -\theta),$$

entonces *la curva es simétrica* con respecto al rayo $\frac{\pi}{2}$ (eje *y*) (figura 18).

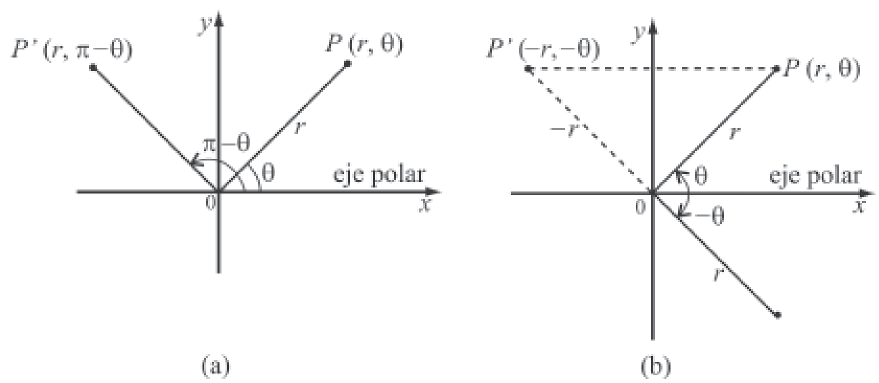

Figura 18

iii. Si la ecuación (1) no varía al sustituir

$$(r \text{ por } -r) \text{ o } (\theta \text{ por } \pi+\theta),$$

entonces la curva es *simétrica con respecto al polo* (origen) (figura 19).

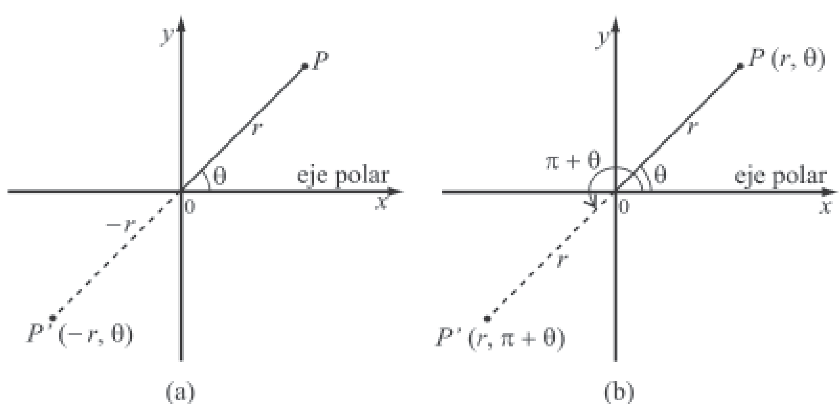

Figura 19

Observación

Dos simetrías implican la tercera. Así por ejemplo, si una curva $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto al eje polar y con respecto al rayo $\frac{\pi}{2}$, entonces también es simétrica con respecto al origen.

- **Tangentes en el origen**

Cuando el polo (origen) pertenece a la curva, al hacer $r = 0$ en (1) se obtiene $f(\theta) = 0$. (2)

La ecuación (2) es una ecuación trigonométrica que al resolverla para θ da:

$$\theta = \alpha_1,\ \theta = \alpha_2,\ \theta = \alpha_3,\ ...,\ \theta = \alpha_n.$$

Entonces, las rectas $\theta = \alpha_1,\ \theta = \alpha_2,\ \theta = \alpha_3,\ ...,\ \theta = \alpha_n$ son las rectas tangentes en el origen de la curva $r = f(\theta)$.

Las tangentes en el origen, conjuntamente con las simetrías, permiten conocer la gráfica de muchas curvas en coordenadas polares con no muchos valores de θ y los correspondientes valores de r.

- **Máximos y mínimos de $r = f(\theta)$**

En muchas ocasiones los máximos y/o mínimos de r ayudan a construir la gráfica.

Para determinarlos, hallamos los valores de θ para los cuales $r' = f'(\theta) = 0$ o $f'(\theta)$ no existe, y los correspondientes valores de r.

Ejemplo 5

Trace la gráfica correspondiente a $r = f(\theta) = 2\operatorname{sen} 3\theta$. (1)

Solución

De acuerdo a 1.2.1 (*vi*), la gráfica corresponde a una rosa de «tres pétalos». Para trazarla, usemos los elementos adicionales descritos en 1.2.2.

- **Simetrías**

i. Eje polar: cambiar (θ por $-\theta$) o (r por $-r$ y θ por $\pi - \theta$).

Al cambiar θ por $-\theta$ en la ecuación (1) resulta:

$$r = 2\ \operatorname{sen} 3(-\theta) = 2\ \operatorname{sen}\ (-3\theta).$$

Pero $\operatorname{sen}\ (-3\theta) = -\operatorname{sen}\ (3\theta)$.

Luego

$$r = -2\operatorname{sen} 3\theta. \qquad (2)$$

Al comparar (1) y (2) se deduce que la ecuación de la curva sí varía y, por tanto, la curva *no* es simétrica con respecto al eje polar.

De otro lado, al cambiar r por $-r$ y θ por $(\pi-\theta)$ en (1) resulta:

$$-r = 2\ \text{sen}\,3\ (\pi-\theta) = 2\ \text{sen}\ (3\pi-3\theta) = 2\ \text{sen}\ (3\theta) \Rightarrow r = -2\ \text{sen}\ 3\theta. \qquad (3)$$

Al comparar (1) y (3) se deduce que la ecuación sí varía y, por tanto, la curva *no* es simétrica con respecto al eje polar.

ii. Rayo $\frac{\pi}{2}$: cambiar $(\theta$ por $\pi-\theta)$ o $(r$ por $-r$ y θ por $-\theta)$.

Al cambiar θ por $(\pi-\theta)$ en (1) se obtiene:

$$r = 2\ \text{sen}\,3(\pi-\theta) = 2\ \text{sen}\,(3\pi-3\theta) = 2\ \text{sen}\ 3\theta,$$

entonces se obtiene

$$r = 2\ \text{sen}\ 3\theta$$

y la ecuación de la curva no varía, lo cual indica que $r = 2\ \text{sen}\ 3\theta$ *sí es simétrica* con respecto al rayo $\frac{\pi}{2}$.

Geométricamente esto indica que la parte de la gráfica de los cuadrantes I y IV se refleja exactamente en los cuadrantes II y III.

iii. Con respecto al polo.

No es simétrica con respecto al polo (demuéstrelo por reducción al absurdo).

- **Tangentes en el origen**

Al hacer $r = 0$ en la ecuación (1), podemos escribir:

$$0 = 2\ \text{sen}\ 3\theta.$$

Resolviendo para θ la ecuación trigonométrica anterior, se obtiene:

$$3\theta = 2n\pi,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

De aquí,

$$\theta = \frac{2n\pi}{3},\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Esta fórmula proporciona todas las tangentes en el origen.

Esto es,

$$\theta = 0,\ \theta = \frac{2\pi}{3},\ \theta = \frac{4\pi}{3},\ \theta = \frac{6\pi}{3},\ \text{etc...}$$

son las rectas tangentes a la curva en el origen.

- **Tabla de valores**

La tabla de valores que se adjunta, conjuntamente con la simetría y las tangentes en el origen, es suficiente para trazar toda la curva.

Tabla 1

è	0º	10º	15º	20º	30º	40º	45º	50º	60º	70º	75º	80º	90º
èrad	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$
3è	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
r	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	-2

Al llevar al plano polar los pares de valores de r y de la tabla 1 se obtiene la porción de curva que aparece en la figura 20*a*.

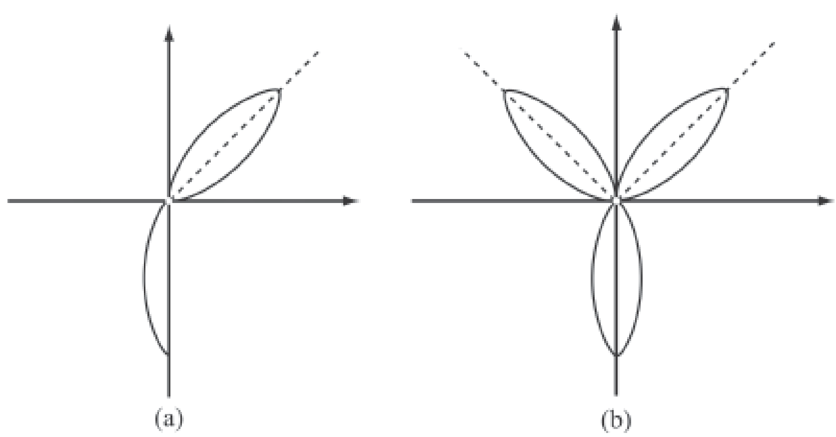

Figura 20

Como la curva es simétrica con respecto al rayo $\frac{\pi}{2}$, entonces la porción de curva en el primer cuadrante se refleja en el segundo y la porción de curva en el tercer cuadrante se refleja en el cuarto, obteniendo así la gráfica completa que aparece en la figura 20*b*.

1.3 Área entre curvas en coordenadas polares

La idea central en esta sección es establecer, usando integrales, una fórmula para determinar el área de una cierta región acotada por las gráficas de dos curvas en polares $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$ y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ que pasan por el polo (figura 21*a*).

Usaremos la aproximación en forma diferencial para calcular el área.

Para ello consideremos el área sombreada como el área de la corona circular de radio exterior $r_\varepsilon = f(\theta)$, radio interior $r_i = g(\theta)$ y ángulo central $d\theta$ (figura 21*b*).

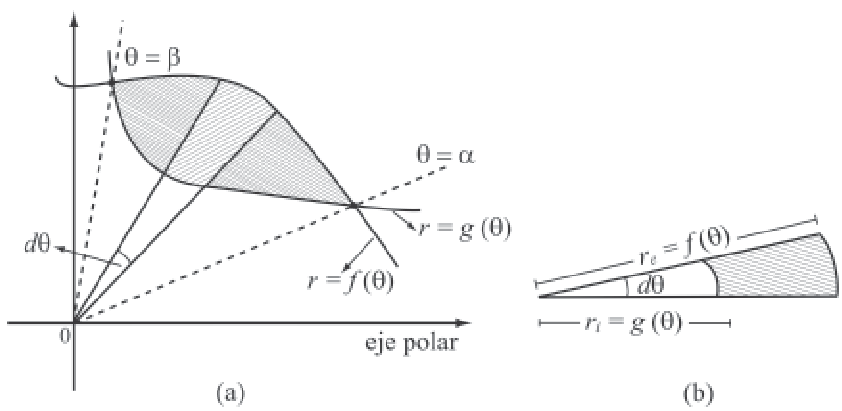

Figura 21

De acuerdo a la figura 21*b*:

$$dA = \frac{1}{2} r_\varepsilon^2 d\theta - \frac{1}{2} r_i^2 d\theta \quad \text{(ejemplo 9 de la sección 18.2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(\theta)^2 - g(\theta)^2 \right] d\theta \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[f(\theta)^2 - g(\theta)^2 \right] d\theta. \qquad (1)$$

Observaciones

i. En la fórmula (1) α y β son las rectas de intersección de las dos curvas, es decir, los valores de θ para los cuales $f(\theta) = g(\theta)$.

ii. En muchas ocasiones, la igualdad $f(\theta) = g(\theta)$ no proporciona todas las rectas de intersección entre $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$. Si en estos casos se quieren conocer todas las rectas de intersección se deben expresar $f(\theta)$ y $g(\theta)$ en todas sus representaciones posibles y luego buscar las intersecciones entre todas ellas.
En particular, se debe tener en cuenta que si $r = f(\theta)$ es la ecuación de una curva en polares, entonces la misma curva viene dada por $(-1)^n \cdot r = f(\theta + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 6

Use coordenadas polares para determinar el área que está fuera del círculo $r = 4\cos\theta$, pero interior al limazón con nudo $r = 1 + 2\cos\theta$.

Solución

En la figura 22 aparecen dibujadas las dos curvas y el área sombreada por determinar.

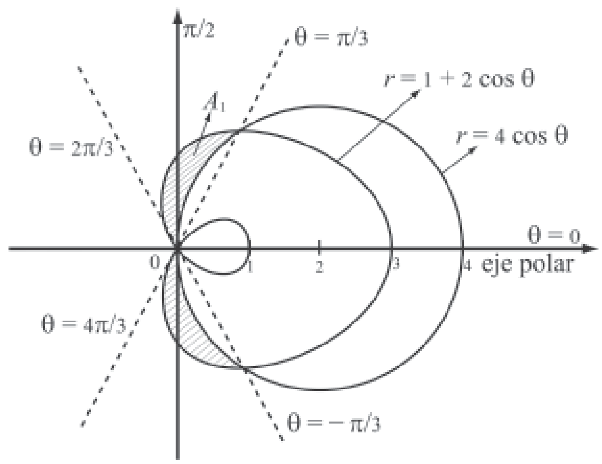

Figura 22

Determinemos inicialmente los puntos de intersección entre las curvas.

Así,

$$1 + 2\cos\theta = 4\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3}.$$

También, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ resulta de intersecar $r = -1 + 2\cos\theta$ (otra forma de la ecuación del limazón usando la observación *ii*) con el círculo $r = 4\cos\theta$.

Ahora, como la región es simétrica con respecto al eje polar, podemos asumir que el área total $A = 2A_1$.

Pero,

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} (r_L^2 - r_c^2)\, d\theta + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} r_L^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} r_L^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} r_c^2\, d\theta,$$

donde r_L corresponde al r del limazón y r_c corresponde al r del círculo.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
A = 2A_1 &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (1+2\cos\theta)^2 \, d\theta - \int_{\pi/3}^{\pi/2} (4\cos\theta)^2 \, d\theta \\
&= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (1+4\cos\theta + 2 + 2\cos 2\theta)\, d\theta - \int_{\pi/3}^{\pi/2} (8+8\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= [3\theta + 4\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta]_{\pi/3}^{2\pi/3} - [8\theta + 4\operatorname{sen} 2\theta]_{\pi/3}^{\pi/2} \\
&= [\pi - \sqrt{3}] - \left[\frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right] = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}.
\end{aligned}
$$